ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES
Fondée en 1949 — Reconnue par l'État
Diplôme visé par le Ministère de l'Éducation Nationale
1, Rue Bougainville — 75007 PARIS
Tel. : 551 32-59

CONCOURS D'ADMISSION

SESSION DE 1986

MATHEMATIQUES - 1ÈRE EPREUVE
(Voie générale)

DUREE 4 H - COEFFICIENT 4

PROBLÈME I

Les parties I, II et III peuvent être traitées séparément.

Partie I

Soit $F_n(x) = (x - a)^n (x - b)^n$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ et n un entier naturel non nul.
Démontrer par récurrence que si $p < n$; la dérivée d'ordre p de $F_n(x)$ est de la forme :

$\frac{d^p F_n(x)}{dx^p} = (x - a)^{n-p}(x - b)^{n-p}\Phi_p(x)$ où $\Phi_p(x)$ est un polynôme de degré p que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie II

Soient u et v deux fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$; on rappelle la formule de Leibniz :

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}} \cdot \frac{d^k v}{dx^k}$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

On considère les polynômes $Y_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2 - 1)^n$ et soit $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} Y_n(x)$ pour $n \geqslant 1$ et $P_0(x) = 1$.

1°) Calculer directement $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$.
2°) En appliquant la formule de Leibniz ; calculer le coefficient de x^n dans $P_n(x)$.
(Pour une formulation simple, on admettra $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$)
3°) Démontrer la relation : $(x^2 - 1)\frac{dY_n}{dx} = 2n\,x\,Y_n$

4°) Cette relation donne : $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2 - 1)^n = 2n \frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^{n-1} x)$.
En appliquant la formule de Leibniz au second membre de cette équation ; montrer que :
$P'_n = x P'_{n-1} + nP_{n-1}$ ①
où $P'_n = \frac{dP_n}{dx}$
5°) En appliquant la formule de Leibniz au second membre de l'équation :

$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n = 2n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2 - 1)^{n-1} x)$ (déduite du 3°)

montrer que : $P_n = xP_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{(n-2)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2 - 1)^{n-1}$. ②

6°) En appliquant autrement la formule de Leibniz à $\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$

montrer que :

$$P_n = \frac{1}{2n}(x^2 - 1)P'_{n-1} + x P_{n-1} + \frac{1}{2^n (n-2)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2 - 1)^{n-1} \quad ③$$

7°) Des formules ①, ② et ③, déduire :

$(x^2 - 1)P'_{n-1} = n(P_n - x P_{n-1})$ ④
$xP'_n = P'_{n-1} + n P_n$ ⑤
8°) Déduire des formules ④ et ⑤ la relation :
$(n + 1)P_{n+1} - (2n + 1)x P_n + nP_{n-1} = 0$

Ecole Sup. Libre des Sciences Commerciales Appliquées
Voie generale.Math 1
1986
page 285

Partie III

1°) Soit $I_n = \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n \, dx$

a) Démontrer que $(2n + 1)I_n = -2n I_n - 1$

b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

2°) En supposant la formule de la partie I établie ; déduire la valeur de :

$$I_n = \int_a^b Q(x) \frac{d^n F_n(x)}{dx^n} \, dx \text{ et } K_n = \int_{-1}^{+1} Q(x) \, P_n(x) \, dx$$

où $Q(x)$ est un polynôme de degré inférieur à n strictement.

3°) Quelle est la valeur de $\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) \, dx$?

PROBLÈME II

I] k étant une constante réelle, positive ou nulle, on considère la fonction $f(t) = t^k e^{-t}$ de la variable réelle t.

1°) Étudier cette fonction pour $t \geq 0$.

2°) Construire sa représentation graphique C. On construira les divers modèles des courbes C sur une même figure.

3°) On considère l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \, dt$.

On supposera cette intégrale convergente.

a) Trouver une relation de récurrence entre I_k et I_{k-1}.

b) Calculer explicitement I_k en fonction de k lorsque k est un entier naturel.

II] On considère l'ensemble E_2 des polynômes en x, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2 : $p(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2$.

A tout polynôme p on associe la matrice $P = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

1°) La fonction de la variable réelle x :

$$p_1(x) = \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) \, e^{-t} \, p(t) \, dt$$

est un polynôme de E_2.

Montrer que la matrice P_1 associée à p_1 peut se mettre sous la forme d'un produit matriciel $P_1 = AP$. Calculer la matrice A.

2°) Déterminer les valeurs propres de A.

3°) Déterminer les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

4°) s étant une constante réelle donnée non nulle ; déterminer les polynômes p de E_2 tels que $p_1 = sp$.

On discutera selon les valeurs de s et on donnera dans chaque cas l'expression explicite des polynômes p.

page 286 1986 Ecole Sup. Libre des Sciences Commerciales Appliquées
Voie générale.Math 1